



**UNIVERSITAT DE LLEIDA  
FACULTAT DE DRET I ECONOMIA**

**PLA 1993**

---

**ENSENYAMENT: CIÈNCIES EMPRESARIALS**

---

**ASSIGNATURA: Matemàtiques (codi 3082)**

---

**PROFESSOR/A: Carles Capdevila Marqués/ Lluís Miquel Pla Aragonés**

---

**CRÈDITS: 9**

**TIPUS: Troncal**

**CURS: 1r**

**QUADRIMESTRE: Anual**

---

### **OBJECTIUS I DESCRIPCIÓ**

Aquesta assignatura s'ha concebut amb la finalitat d'assolir, fonamentalment, dos objectius generals. Per una banda, des d'un punt de vista metodològic, es vol contribuir a familiaritzar a l'alumne amb l'ús d'un llenguatge simbòlic i a proporcionar-li nous esquemes de raonament que posteriorment pugui reproduir en altres àmbits del seu interès. En aquest aspecte, tant el llenguatge propi de la matemàtica com, sobretot, la seva metodologia i els models que ens presenta, tenen un gran interès donat que ens permeten el tractament de gran nombre de problemes, que sense la "simplificació" que suposa la utilització d'aquests models serien molt difícils d'abordar.

Així doncs, pensant amb les matemàtiques com a conjunt de models abstractes susceptibles de ser aplicats a moltes i diverses àrees del coneixement, es pretén que l'alumne sigui capaç de reconèixer aquests models fora de l'àmbit concret de la matemàtica. En aquest sentit, es presentaran les matemàtiques com una eina indispensable i eficaç per al plantejament i la resolució de molts problemes relacionats amb la gestió empresarial i financera.

Finalment, si les tècniques que ens ofereix la matemàtica, volem que siguin realment útils per al càlcul, es indispensable el coneixement d'un software adequat. Es per això que es procurarà complementar cada tema amb les referències informàtiques mes adients i es plantejaran exercicis per a resoldre amb l'ajut d'algun programa informàtic.

Aquest curs de matemàtiques s'ha estructurat en cinc grans blocs temàtics. Un primer bloc està destinat a la *Matemàtica Financera*, en ell s'introdueixen els conceptes bàsics d'aquesta disciplina amb el màxim de rigor i precisió possibles. Aquest primer bloc, és de gran utilitat en altres assignatures del pla d'estudis de la Diplomatura en Ciències Empresarials de la UdL. com pot ser "Direcció Financera".

El segon bloc està destinat a l'*Àlgebra Lineal* i compren qüestions relatives a l'estudi i resolució de sistemes d'equacions lineals, àlgebra matricial, diagonalització de matrius quadrades etc. Aquests temes estan directament relacionats amb l'estudi de les taules input-output, el model econòmic de Leontief, l'estabilitat de sistemes dinàmics en economia etc. i a més a més són de gran interès en altres matèries com pot ser "Estructura i Política Econòmica".

El tercer bloc es dedica a les *Funcions Reals d'una Variable Real* i algunes de les seves aplicacions a l'economia.

El quart bloc està dedicat a l'*Optimització*, que és un tema d'una gran importància ja que en economia la major part dels problemes o be son d'optimització, o be hi estan d'alguna manera relacionats. En aquest curs s'intenta donar una visió global del problema de l'optimització per tal de ser aprofundida en l'assignatura "Ampliació de Matemàtiques". Aquestes qüestions son d'una gran utilitat en l'àrea d'Economia de l'Empresa.

El darrer dels blocs temàtics del curs està dedicat al Càlcul de Primitives i Integració de funcions d'una variable, que també té un gran interès en altres àrees com és l'estadística.

## **PROGRAMA**

### **1. MATEMÀTICA FINANCERA**

#### **1.1. Introducció**

Capital financer.  
Taxa d'interès. Interès Simple i Compost.

#### **1.2. Interès Simple**

Operacions a molt curt termini.  
Actualització i Capitalització.  
El Descompte Comercial en lletres de canvi.

#### **1.3. Interès Compost**

Actualització i capitalització.  
Interès nominal i efectiu. La Taxa Anual Efectiva (TAE).  
Interès continu.  
Interessos durant una part d'un període.  
Diagrames de temps. Equacions de Valor.  
Avaluació d'inversions: VAN, TIR i PAY-BACK.

#### **1.4. Rendes**

Tipus de Rendes (prepagables, postpagables, fraccionades, diferides, constants, creixents, decreixents, etc.).  
Valor Final d'una Renda (Capitalització).  
Valor Actual d'una Renda (Amortització).  
Taules d'amortització.

### **2. ÀLGEBRA LINEAL**

#### **2.1. Estructures algebraiques**

Grups, Anells i Cossos.

## **2.2. Espais Vectorials**

Definició, exemples i propietats.

Subespais vectorials: Definició, exemples i propietats.

Combinació lineal de vectors. Subespai generat. Sistema de generadors.

Dependència i independència lineal.

Bases d'un espai vectorial. Teorema de Steinitz. Dimensió.

Components d'un vector. Unicitat.

## **2.3 Matrius**

Definicions i exemples.

Alguns tipus particulars de matrius: simètriques, diagonals, ortogonals, etc.

Operacions amb matrius. Propietats.

Matrius particionades. Operacions i propietats.

## **2.4. Determinants**

El grup de les permutacions de  $n$  elements.

Determinant de  $n$  vectors d'un espai vectorial de dimensió  $n$ .

Menor complementari i adjunt d'un element d'una matriu quadrada.

Determinant d'una matriu quadrada. Definició i exemples.

Propietats deis determinants.

Càlcul de determinants.

## **2.5. Aplicacions dels Determinants**

Rang d'una matriu i d'un conjunt de vectors. Definició i càlcul.

Transformacions elementals i matrius equivalents.

Mètode de Gauss per al càlcul del rang d'una matriu.

Matrius inversibles. Caracterització, propietats i càlcul de la matriu inversa.

Aplicació del mètode de Gauss-Jordàn per al càlcul de la matriu inversa.

Matrius ortogonals. Definició i propietats.

Inversa d'una matriu particionada.

## **2.6. Sistemes d'Equacions Lineals**

Definició i expressió matricial. Interpretació de la resolució.

Sistemes equivalents.

Discussió d'un sistema d'equacions lineals. Teorema de Rouché-Frobenius.

Resolució de sistemes lineals: Regla de Cramer per a sistemes

compatibles i determinats. Mètode de reducció de Gauss, matriu esglaonada per files. Regla de Cramer per a sistemes compatibles indeterminats.

Sistemes homogenis.

## **2.7. La Taula Input-Output. El Model de Leontief**

Descripció d'una taula input-output. Matriu tecnològica, vector de demanda final, vector dels sectors finals, etc. Anàlisi input-output. El model de Leontief. Significat econòmic dels elements de la matriu inversa de Leontief. Modificació del model de Leontief.

Aplicacions de l'anàlisi input-output.

## **2.8. Diagonalització de Matrius Quadrades**

Plantejament del problema.

Matrius semblants. Definició i propietats.

Matrius diagonalitzables. Definició.

Vectors propis i valors propis associats a una matriu quadrada. Polinomi característic.

Propietats dels valors i vectors propis.

Condicció necessària i suficient de diagonalització.

Diagonalització de matrius simètriques.

Inversió de matrius diagonals.

Potència d'una matriu diagonal. Aplicacions a l'estabilitat d'un sistema dinàmic.

## **3. FUNCIONS REALS D'UNA VARIABLE REAL**

### **3.1. Topologia a $\mathbb{R}$**

Valor absolut i distància.

Intervals, semirectes i entorns.

Punts interiors, adherents i frontera d'un subconjunt de  $\mathbb{R}$ .

Fites superiors i inferiors d'un subconjunt de  $\mathbb{R}$ . Màxim i mínim. Suprem i ínfim.

Conjunts convexos.

### **3.2. Preliminars**

Correspondències, aplicacions i funcions. Domini i recorregut d'una funció.

Gràfica d'una funció real d'una variable real.

Gràfiques d'algunes de les funcions més usuals.

Algunes funcions econòmiques. Corbes de demanda, d'ingrés total de cost, etc.

### **3.3. Límit i Continuitat**

Concepte intuïtiu de continuïtat d'una funció.

Comportament d'una funció al voltant d'un punt de discontinuïtat. Límit d'una funció en un punt. Condicions necessàries per a poder definir el concepte de límit. Límits laterals, la seva relació amb el límit.

Límits a d'infinit i límits infinits.

Propietats i càlcul de límits. Infinitèsims.

Continuïtat d'una funció en un punt. Definició, propietats i exemples.

Continuïtat per la dreta i per l'esquerra.

Tipus de discontinuïtats.

Funcions contínues en un interval. Propietats. Teorema de Bolzano.

Funcions discontinües en economia, la seva interpretació.

### **3.4. Derivabilitat**

Introducció: avaluació de la taxa de variació d'una funció en un punt.

El concepte de derivada d'una funció en un punt.

Interpretació geomètrica.

Condicions per tal de poder definir el concepte de derivada.

Derivades laterals, la seva relació amb la derivada.

Punts de no derivabilitat d'una funció. Caracterització i interpretació gràfica.

Continuïtat i derivabilitat.

La funció derivada. Derivades successives.

Càlcul de derivades.

Teorema de Rolle. Aplicacions.

Teorema dels Incrementes Finites i Teorema de Cauchy.

### **3.5. Aplicacions Econòmiques de la Derivada**

El Marginalisme econòmic. Utilitat, cost i productivitat marginal.  
Elasticitat. Concepte i aplicacions.

### **3.6. Altres Aplicacions de la Derivada: Càlcul de Límits. Estudi i Representació Gràfica de Funcions**

Càlcul de límits. Regla de l'Hôpital.  
Aproximació local de funcions. Fòrmula de Taylor.  
Estudi d'una funció: Domini, creixement, extrems, concavitat, inflexions, asíptotes, etc.  
Aplicació de la derivada a l'estudi d'una funció.  
Anàlisi de les corbes de cost. El monopoli i el duopoli.

## **4. OPTIMITZACIÓ**

### **4.1. Formulació General del Problema**

Plantejament del problema i conceptes generals. Concreció a funcions d'una i dues variables.

### **4.2. Optimització Sense Restriccions**

Òptims locals i òptims globals per funcions d'una variable. Teorema de Weierstrass.

### **4.3. Optimització amb Restriccions**

Restriccions d'igualtat: Funcions de dues variables amb una restricció. Funcions de tres variables amb dues restriccions. Restriccions de desigualtat. Programació lineal: Plantejament general. Resolució gràfica d'un programa lineal amb dues variables. Els problemes clàssics de l'assignació de recursos, la dieta i el transport. Introducció al mètode Simplex.

## **5. INTEGRACIÓ**

### **5.1. Càlcul de Primitives**

Definició i propietats.  
Mètodes generals per al càlcul de primitives. Immediates, per parts, canvi de variable, etc.  
Primitives de funcions trigonomètriques.  
Primitives de funcions racionals.

### **5.2. Càlcul Integral**

El problema del càlcul d'una superfície.  
La integral de Riemann. Definició i propietats.  
Relació entre el càlcul d'àrees i volums de revolució.  
Càlcul d'àrees i volums de revolució.  
Càlcul de la longitud d'una corba.  
Concepte de valor mitjà d'una funció.  
Aplicacions econòmiques de la integral.

## SOFTWARE

El suport informàtic és imprescindible per qualsevol disciplina que requereixi un determinat potencial de càlcul. En aquest sentit, pel que fa a les matemàtiques, no solament és útil com a complement del curs sinó sobretot com a eina per poder aplicar els conceptes i els models de la matemàtica als problemes reals.

Dels 9 crèdits que té l'assignatura s'en dedicarà un, aproximadament, a *Pràctiques d'Ordinador*, amb l'objectiu d'introduir un full de càlcul, més concretament l'EXCEL, i un paquet matemàtic general que serà el DERIVE.

## BIBLIOGRAFIA TEMÀTICA

### MATEMÀTICA FINANCERA

**Capdevila, C.- Conde, J.- Gil, A.** (1992) *Matemàtiques Empresariales I. Exercicis amb Solucions i Algunes Regles Pràctiques*. PPU.

**Capdevila, C.- Conde, J.- Moltó, M.- Pía, LI.** (1994) *Recursos Informàtics Aplicats a la Gestió Empresarial*. Autors.

**Díaz Mata, A.- Aguilera Gómez, V.M.** (1987) *Matemáticas Financieras*. Me. Graw-Hill.

**Fon tañáis Albiol, H.** (1992) *Matemática Financiera. Supuestos*. Servicio Universidad, Ediciones.

**Frank Ayres, JR.** (1971) *Matemáticas Financieras, Teoría y 500 Problemas Resueltos*. Me. Graw-Hill.

**Lóbez Urquia, J.** (1968) *Matemática Financiera*. Gráficas Instar.

**Lora Espinosa, E.- Pérez Garzón, J.I.** (1991) *Curso de Matemática Empresarial Operaciones Financieras y Optimización*. Pirámide.

**Vercasson, A.- Skrhak, B.** (1994) *Matemáticas Financieras i Coste de la Financiación*. Deusto.

### ÁLGEBRA LINEAL

**Alegre, P. i altres.** (1990) *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales 1*. AC.

**Alsina, M.- Miret, J.M.- Río, A.** (1991) *Càlcul i Àlgebra. Resums i Problemes (amb solucions)*.

**Capdevila, C.- Conde, J.- Gil, A.** (1992) *Matemàtiques Empresariales I. Exercicis amb Solucions i Algunes Regles Pràctiques*. PPU.

**De Diego, B. i altres.** (1986) *Problemas de Álgebra Lineal*. Deimos. Kleiman, A. (1982) *Matrices. Aplicaciones Matemáticas en Economía y Administración*. Limusa.

**Lora Espinosa, E.- Pérez Garzón, J.L** (1991) *Curso de Matemática Empresarial, Operaciones Financieras y Optimización*. Pirámide.

**Muñoz, F. i altres.** (1988) Manual de Álgebra Lineal. Ariel Economía.

**Rojo, J.- Martín, J.** (1994) Ejercicios i Problemas de Álgebra Lineal Mc. Graw-Hill.

**Rorres, CH.- Antón, H.** (1979) Aplicaciones de Álgebra Lineal. Limusa.

**Samamed, O. i altres.** (1989) Matemáticas I. Economía y Empresa. Teoría. Centro de Estudios Ramón Areces.

## **FUNCIONS REALS D'UNA VARIABLE REAL**

**Capdevila, C.- Conde, J.- Gil, A.** (1992) Matemàtiques Empresariales I. Exercicis amb Solucions i Algunes Regles. Pràctiques. PPU.

**De Guzmán, M.- Rubio, B.** (1992) Análisis Matemático 2. Funciones, Integrales, Derivadas. Pirámide.

**Larson, R.E.- Hostetler, RP.** (1989) Cálculo y Geometría Analítica. Mc. Graw-Hill.

**Ortega, J.M.** (1990) Introducció a l'Anàlisi Matemàtica. Publicacions de la U.A.B.

## **FUNCIONS REALS DE VÀRIES VARIABLES I OPTIMITZACIÓ**

**Balbas, A.- Gil, J.A.** (1990) Programación Matemática. AC.

**Barbolla, R.- Cerdà, E.- Sanz, P.** (1991) Optimización Matemática: Teoría, Ejemplos y Contraejemplos. Espasa Calpe.

**Chiang, A.C.** (1987) Métodos Fundamentales de Economía Matemática. Mc. Graw-Hill.

**Grafe, J.** (1990) Matemáticas para Economistas. Mc. Graw-Hill.

**Larson, R.E.- Hostetler, R.P.** (1989) Cálculo y Geometría Analítica. Mc. Graw-Hill.

**López Cachero, M.- Vegas Pérez, A.** (1994) Curso Básico de Matemáticas para la Economía i la Dirección de Empresas. Pirámide.

**Lora Espinosa, E.; Pérez Garzón, J.I.** (1991) Curso de Matemática Empresarial, Operaciones Financieras y Optimización. Pirámide.

**Ortega Aramburu, J.M.** (1990) Introducció a l'Anàlisi Matemàtica. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona.

**Rey Pastor, J. i altres** (1968) Análisis Matemático. Vol. 2: Cálculo Infinitesimal de Varias Variables. Aplicaciones. Kapelusz.

**Samamad, O. i alt.** (1988) Matemáticas 1. Economía y Empresa, Teoría. Centro de Estudios Ramón Areces.

## **INTEGRACIÓ A $R^n$**

**Grafe, J.** (1990) Matemáticas para Economistas. Mc. Graw-Hill.

**Larson, R.E.- Hostetler, R.P.** (1989) Cálculo y Geometría Analítica. Mc. Graw-Hill.

**Rey Pastor, J. i altres** (1968) Análisis Matemático. Vol. 2: Cálculo Infinitesimal de Varias Variables. Aplicaciones. Kapelusz.

**Samamed, O. i altres.** (1989) Matemáticas 1. Economía y Empresa. Teoría. Centro de Estudios Ramón Areces.

## **OPTIMITZACIÓ**

**Balbas, A.- Gil, J.A.** (1990) Programación Matemática. AC.

**Barbolla, R.- Cerdà, E.- Sanz, P.** (1991) Optimización Matemática: Teoría, Ejemplos y Contraejemplos. Espasa Calpe.

**Capdevila, C.- Conde, J.- Gil, A.** (1992) Matemàtiques Empresariales I. Exercicis amb Solucions i Algunes Regles Pràctiques. PPU.

**Chiang, A.C.** (1987) Métodos Fundamentales de Economía Matemática. Mc. Graw-Hill.

**Larson, R.E.- Hostetler, R.P.** (1989) Cálculo y Geometría Analítica. Mc. Graw-Hill.

**Lora Espinosa, E.- Pérez Garzón, J.L** (1991) Curso de Matemática Empresarial Operaciones Financieras y Optimización. Pirámide.

**Rodríguez Ruiz, J. i altres.** (1991) Matemáticas 2. Economía y Empresa. Teoría. Centro de Estudios Ramón Areces.

**Rorres, CH.- Antón, H.** (1979) Aplicaciones de Álgebra Lineal. Limusa.

## **INTEGRACIÓ**

**Capdevila, C.- Conde, J.- Gil, A.** (1992) Matemàtiques Empresariales I. Exercicis amb Solucions i Algunes Regles Pràctiques.

**Grafe, J.** (1990) Matemáticas para Economistas. Mc. Graw-Hill.

**Larson, R.E.- Hostetler, RP.** (1989) Cálculo y Geometría Analítica. Mc. Graw-Hill.

**Ortega, J.M.** (1990) Introducció a l'Anàlisi Matemàtica. Publicacions de la U. A.B.

**Rodríguez Ruíz, J. i altres.** (1991) Matemáticas 2. Economía y Empresa. Teoría. Centro de Estudios Ramón Areces.



## **SOFTWARE**

**Cobb, D. i altres.** El Libro del Microsoft EXCEL. Anaya Multimedia.

**Getán, J. i altres.** (1994) Problemas de Matemáticas Aplicados a la Economía i la Empresa, Resueltos con Ordenador. Ediciones S.

**Medina, A.** (1993) Manual de EXCEL 4.0. Aprendizaje y Uso Avanzado. Anaya Multimedia.

**Paulogorrán, C.- Pérez, C.** (1993) Cálculo Matemático con DERIVE para PC. Ra-Ma.

**García, A.** (1994) Prácticas de Matemáticas con DERIVE.

**Manual EXCEL 5.0** Microsoft.

## **EXERCICIS I PRÀCTIQUES**

Per tal de poder assolir els objectius marcats en aquesta assignatura, serà imprescindible, a més de treballar les diferents qüestions teòriques proposades en el programa, dedicar una bona part de temps a la resolució de problemes que ajudin a la comprensió de les qüestions teòriques i donin una certa agilitat de càlcul.

Per això, al llarg del curs, es proposaran exercicis, per tal de ser treballats pels estudiants. Una part d'aquests exercicis es resoldran a classe o a les hores de tutoria. És imprescindible que, abans que un exercici sigui corregit a classe, hagi estat pensat per l'alumne, altrament la seva resolució serà estèril. Serà bo que els estudiants surtin a la pissarra a resoldre els exercicis.

Per altra banda es podran proposar també unes pràctiques, que seran exercicis més complets que els de classe i que els estudiants podran entregar per tal de que els hi siguin retornats un cop corregits pel professor.

Tant els exercicis que siguin resolts a la pissarra pels estudiants, com les pràctiques entregades, seran puntuats pel professor, la puntuació màxima per a cada exercici o pràctica serà de 0.1 punts, d'aquesta manera cada estudiant podrà tenir una nota suplementària de problemes, que en cap cas podrà ser superior a 0.5 punts per quadrimestre, i que es sumarà a la nota de l'examen per tal d'obtenir la nota final, tal com s'indica a l'apartat d'avaluació.

## **TUTORIES**

Els professors de l'assignatura tenen uns horaris d'atenció als estudiants, per tal que aquests puguin consultar dubtes, plantejar problemes, suggerir sol·lucions, valorar la marxa del curs, etc.

## AVALUACIÓ

L'avaluació de l'assignatura es farà a partir de dos exàmens, un primer parcial, al final del primer quadrimestre, en el que hi entraran els blocs temàtics 1 i 2, i un segon parcial, al final del segon quadrimestre, en el que hi entrarà la resta de blocs temàtics que s'hagin donat.

La qualificació final de l'assignatura provindrà de la nota dels exàmens més la de problemes, seguint l'esquema següent:

<u>Final 1 er. Quadrim.</u>	<u>Final 2on. Quadrim.</u>	<u>Nota Final</u>
$n_1 + p_1 \left\{ \begin{array}{l} < 4.5 \\ > =4.5 \end{array} \right.$	Examen Final: $n$ Ex. 2on. Parcial: $n_2$	$[n + (p_1 + p_2) = N]$ $[(n_1 + n_2/2 + (p_1 + p_2) = N]$

$n_1$  Nota del Primer Examen Parcial.

$p_1$  Nota de Problemes del Primer Parcial. El seu valor no serà Superior a 0.5.

$n_2$  Nota del Segon Examen Parcial.

$p_2$  Nota de Problemes del Segon Parcial. El seu valor no serà Superior a 0.5.

$n$  Nota de l'examen Final.

$N$  Nota Final de l'Assignatura a la Convocatòria de Juny.

**Per tal de superar l'assignatura, ha de ser  $N \geq 5$ .**

**A la convocatòria de setembre** hi haurà un únic examen de tot el programa. La qualificació final de l'assignatura a la convocatòria de setembre ( $N'$ ), s'obté sumant a la nota de l'examen ( $n'$ ) les notes de problemes que s'hagin obtingut durant el curs, és a dir:  $N' = n' (p_1 + p_2)$ .

### **Alguns Consells Impertinents:**

- \* Dedicar, aproximadament, 3 h setmanals a treballar l'assignatura, fora de classe.
- \* Fer molts exercicis.
- \* Aprofitar la tutoria i anar a "incordiar" al professor.